Consenso con líder virtual en sistemas de múltiples agentes inerciales

Eber J. Ávila-Martínez y Juan G. Barajas-Ramírez
Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica (IPICYT)
División de Matemáticas Aplicadas (DMAp)

CNCA-2017 Monterrey, N. L.
Jueves 05 de Octubre del 2017

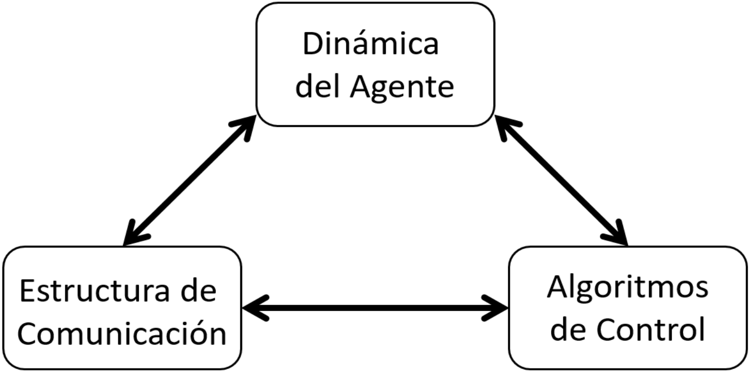
Contenido:

Contenido:

Motivación

En la naturaleza, cuando grandes grupos de individuos operan en forma conjunta exhiben comportamientos autoorganizados (e.g. flocking, swarming, sincronización y consenso).

Sistema Multiagente



Comportamiento colectivo

Consenso[1]

Alcanza un acuerdo en términos de una variable de interés.

[1] [R. Olfati-Saber and R. M. Murray, 2004]

Contenido:

Grafos[1]

Un grafo es un par de conjuntos $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ donde:

- $\mathcal{V} = \{\nu_1, \dots, \nu_N\}$ un conjunto finito de nodos.
- $\mathcal{E} = \mathcal{V} \times \mathcal{V}$ un conjunto de pares ordenados de nodos (ν_i, ν_j) llamados enlaces.

Matriz de adyacencia

La matriz de adyacencia $\mathcal{A}(\mathcal{G}) \in \mathbb{R}^{N\times N}$ se define como $a_{ii} = 0$ y $a_{ij} > 0$ si $(\nu_j, \nu_i) \in \mathcal{E}$, en donde $i \neq j$.

Matriz Laplaciana

La matriz Laplaciana $\mathcal{L}(\mathcal{G}) \in \mathbb{R}^{N\times N}$ se define como $l_{ii} = \sum_{j\neq i} a_{ij}$ y $l_{ij} = -a_{ij}$ donde $i \neq j$. Note que $\sum_{i=1}^{N} l_{ij} = 0\ \forall i = 1, \dots, N$ por lo tanto $\mathcal{L}$ es difusiva.

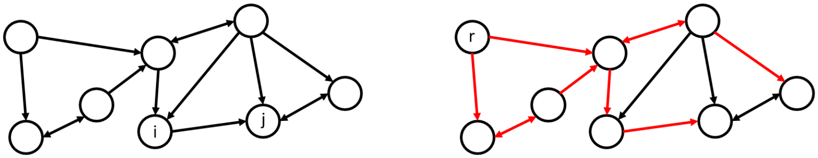
[1] [Mesbahi and Egerstedt, 2010]

Arbol de expansión dirigido[1]

Es un grafo en el que existe cuando menos un nodo raíz que tiene caminos dirigidos hacia todos los demás nodos en la red.

Lema 1

[Ren and Beard, 2008] *La matriz Laplaciana $\mathcal{L}$ tiene un único valor propio 0 y todos los demás con parte real positiva, si y solo si, el grafo $\mathcal{G}$ contiene un arbol de expansión dirigido. Además Rank*$(\mathcal{L}) = N - 1$.



[1] [Mesbahi and Egerstedt, 2010]

Sistema de múltiples agentes inerciales

Agentes inerciales[1]

Considere un sistema multiagente compuesto por N agentes inerciales capaces de comunicarse a través de una estructura $\mathcal{G}$, con dinámica:

$$\begin{aligned} \dot{p}_i &= v_i \\ m_i \dot{v}_i &= u_i, \quad i = 1, \ldots, N, \end{aligned} \tag{1}$$

donde $p_i, v_i, u_i \in \mathbb{R}^n$, son la posición, velocidad y entrada de control, respectivamente, y $m_i > 0$ es la inercia del i-ésimo agente.

Agente líder virtual

Sea la dinámica del líder virtual

$$\begin{aligned} \dot{p}_l &= v_l, \\ \dot{v}_l &= f(p_l, v_l, t), \end{aligned} \tag{2}$$

donde $p_l, v_l \in \mathbb{R}^n$, son la posición y velocidad del líder virtual, y $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+$ es la aceleración.

[1] [Lee and Spong, 2006]

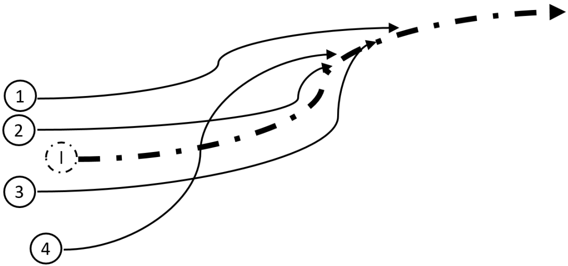
Problema de consenso

Consenso con líder

Se dice que un sistema multiagente alcanza un estado de consenso con un líder virtual si para cualquier condición inicial admisible

$$\lim_{t\to\infty} ||p_i(t) - p_l(t)|| = 0, \tag{3a}$$

$$\lim_{t\to\infty} ||v_i(t) - v_l(t)|| = 0, \quad i = 1, \dots, N \tag{3b}$$



Contenido:

Algoritmo 1 (líder sin aceleración)

Suponga que $f(p_l, v_l, t) \equiv 0$ en (2) y considere el siguiente algoritmo

$$u_i = -k \sum_{j=1}^{N} a_{ij}(p_i - p_j) - b \sum_{j=1}^{N} a_{ij}(v_i - v_j) - d_i \left[k(p_i - p_l) - b(v_i - v_l) \right], \quad i = 1, \ldots, N \tag{4}$$

donde a_{ij} es el ij-ésimo elemento de la matriz de adyacencia asociada a $\mathcal{G}$, y $d_i > 0$ (valor dado) si el agente i recibe información del líder, con $d_i = 0$ en caso contrario. Además, $k, b > 0$ son ganancias a diseñar.

Sean $p_i^e = p_i - p_l$ y $v_i^e = v_i - v_l$ los errores en posición y velocidad, respectivamente. Aplicando el algoritmo (4) en (1), la dinámica del error puede ser escrita como

$$\begin{aligned} \dot{p}_i^e &= v_i^e, \\ m_i \dot{v}_i^e &= -k \sum_{j=1}^{N} (l_{ij} + d_i) p_j^e - b \sum_{j=1}^{N} (l_{ij} + d_i) v_j^e, \quad i = 1, \ldots, N \end{aligned} \tag{5}$$

Dinámica del error

En forma matricial:

$$\begin{aligned} \dot{P}^e &= V^e, \\ (M \otimes I_n)\dot{V}^e &= -k(\mathcal{L}_{\mathcal{D}} \otimes I_n)P^e - b(\mathcal{L}_{\mathcal{D}} \otimes I_n)V^e, \end{aligned} \tag{6}$$

donde $P^e = \left[(p_1^e)^T, \ldots, (p_N^e)^T\right]^T$, $V^e = \left[(v_1^e)^T, \ldots, (v_N^e)^T\right]^T$ son el vector de error en posición y velocidad del sistema completo, $M = diag(m_1, \ldots, m_N) \in \mathbb{R}^{N \times N}$ es la matriz de inercias del grupo, y $\mathcal{L}_{\mathcal{D}} = \mathcal{L} + \mathcal{D}$ con $\mathcal{D} = diag(d_1, \ldots, d_N) \in \mathbb{R}^{N \times N}$.

Reescribiendo (6) con $X^e = \left[(P^e)^T, (V^e)^T\right]^T$ tenemos

$$\dot{X}^e = (\Xi_1 \otimes I_n)X^e \tag{7}$$

donde $\Xi_1 = \begin{bmatrix} 0_N & I_N \\ -k\Gamma & -b\Gamma \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2N \times 2N}$ y $\Gamma = M^{-1}\mathcal{L}_{\mathcal{D}}$.

Resultado 1

Teorema 1

El estado de consenso (3a) y (3b) es alcanzado en un grupo de múltiples agentes inerciales (1) con protocolo (4) si, y solo si, la estructura de comunicación $\mathcal{G}^+$ contiene un árbol de expansión dirigido con el líder como raíz y

$$\frac{b^2}{k} > \max_{1 \leq i \leq N} \frac{Im(\lambda_i)^2}{Re(\lambda_i)(Re(\lambda_i)^2 + Im(\lambda_i)^2)} \tag{8}$$

donde λ_i son los valores propios de Γ.

Grafo extendido

Llamaremos $\mathcal{G}^+$, al grafo que representa la estructura de comunicación que considera al agente líder como el elemento $N+1$ dentro de la red de agentes.

Bosquejo Prueba Teorema 1

Lema 2

[Ren, 2008] *La matriz $\mathcal{L}_{\mathcal{D}}$ es invertible si y solo si $\mathcal{G}^+$ contiene un árbol de expansión dirigido con el líder virtual como raíz. Más aun,* $\rho(\mathcal{L}_{\mathcal{D}}) > 0$.

Demostración.

Bosquejo: Note que las soluciones de (7) son $X^e(t) = (e^{\Xi_1 t} \otimes I_N)X^e(0)$. Sean $\mu_{i,j}$ los valores propios de Ξ_1 dados por la siguiente expresión

$$\mu_{i,j} = \frac{-b\lambda_i \pm \sqrt{b^2\lambda_i^2 - 4k\lambda_i}}{2}, \quad i = 1, \ldots, N, \quad j = 1, 2.$$

Si definimos $\alpha + \mathbf{i}\beta = \sqrt{b^2\lambda_i^2 - 4k\lambda_i}$ con $\mathbf{i} = \sqrt{-1}$, entonces $Re(\mu_{i,j}) < 0$ si y solo si $-bRe(\lambda_i) < \alpha < bRe(\lambda_i)$, la condición (8) garantiza lo anterior. $\square$

Algoritmo 2 (líder con aceleración)

Considere ahora el siguiente algoritmo

$$
\begin{aligned}
u_i = & -\frac{k}{\eta_i}\sum_{j=1}^{N} a_{ij}(p_i - p_j) - \frac{b}{\eta_i}\sum_{j=1}^{N} a_{ij}(v_i - v_j) + \frac{1}{\eta_i}\sum_{j=1}^{N} a_{ij}\dot{v}_j \\
& - \frac{d_i}{\eta_i}\left(k(p_i - p_l) + b(v_i - v_l) - \dot{v}_l\right), \quad i = 1, \ldots, N
\end{aligned} \tag{9}
$$

donde $\eta_i = \frac{1}{m_i}(d_i + \sum_{j=1}^{N} a_{ij})$.

Sean $p_i^e = p_i - p_l$ y $v_i^e = v_i - v_l$ los errores en posición y velocidad, respectivamente. Aplicando el algoritmo (9) en (1), la dinámica del error puede ser escrita como

$$
\begin{aligned}
\dot{p}_i^e &= v_i^e, \\
m_i \dot{v}_i^e &= -\frac{k}{\eta_i}\sum_{j=1}^{N}(l_{ij} + d_i)p_j^e - \frac{b}{\eta_i}\sum_{j=1}^{N}(l_{ij} + d_i)v_j^e + \frac{1}{\eta_i}\sum_{j=1}^{N} a_{ij}\dot{v}_j^e, \quad i = 1, \ldots, N
\end{aligned} \tag{10}
$$

Dinámica del error

En forma matricial:

$$\begin{aligned} \dot{P}^e &= V^e, \\ (\mathcal{L}_{\mathcal{D}} \otimes I_n)\dot{V}^e &= -k(\mathcal{L}_{\mathcal{D}} \otimes I_n)P^e - b(\mathcal{L}_{\mathcal{D}} \otimes I_n)V^e, \end{aligned} \tag{11}$$

donde $P^e = \left[(p_1^e)^T, \ldots, (p_N^e)^T\right]^T$, $V^e = \left[(v_1^e)^T, \ldots, (v_N^e)^T\right]^T$ son el vector de error en posición y velocidad del sistema completo, y $\mathcal{L}_{\mathcal{D}} = \mathcal{L} + \mathcal{D}$ con $\mathcal{D} = diag(d_1, \ldots, d_N) \in \mathbb{R}^{N \times N}$.

Por el Lemma 2 sabemos que la inversa de $\mathcal{L}_{\mathcal{D}}$ existe, entonces podemos reescribir (11) como:

$$\dot{X}^e = (\Xi_2 \otimes I_n)X^e \tag{12}$$

donde $\Xi_2 = \begin{bmatrix} 0_N & I_N \\ -kI_N & -bI_N \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2N \times 2N}$ y $X^e = \left[(P^e)^T, (V^e)^T\right]^T$.

Resultado 2

Teorema 2

Sea un sistema de múltiples agentes inerciales con dinámica (1), un líder virtual con dinámica (2) y un algoritmo de consenso (9). El problema de consenso con un líder virtual (3a) y (3b) es resuelto si y solo si el grafo $\mathcal{G}^+$ contiene un árbol de expansión dirigido con el agente líder como raíz. Más ún, si $b \geq 2\sqrt{k}$ para cualquier $k > 0$ la convergencia es exponencial.

Demostración.

Bosquejo: Los valores propios $\mu_{i,j}$ de Ξ_2 son

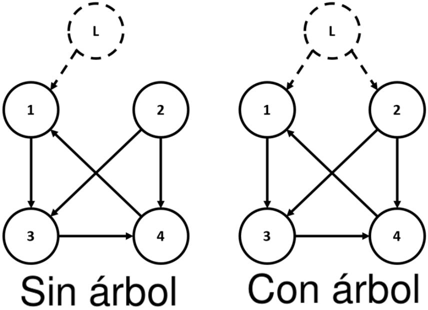
$$\mu_{i,j} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4k}}{2}, \quad i = 1, \ldots, N, \quad j = 1, 2.$$

La matriz Ξ_2 es Hurwitz para todo $k, b > 0$. Luego, si $b \geq 2\sqrt{k}$ los valores propios de Ξ_2 solo tienen parte real, entonces la convergencia es exponencial. □

Contenido:

Red de agentes

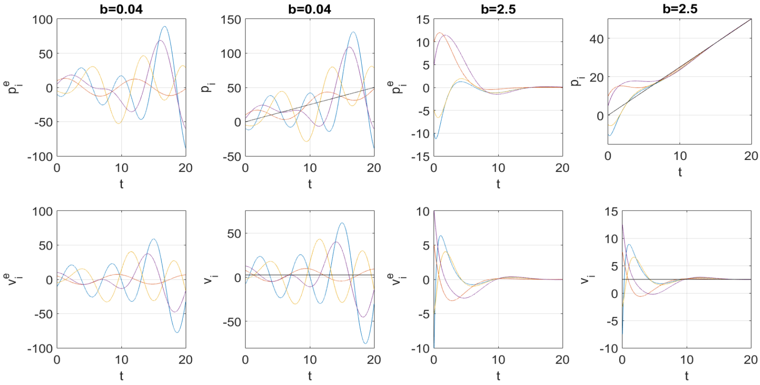
Supondremos un grupo de $N = 4$ agentes inerciales con $n = 1$ y estructuras de comunicación mostrada a continuación:



$$M = diag([2,3,4,5]),$$
$$\mathcal{D} = diag([1,1,0,0]),$$
$$\mathcal{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$
$$\Gamma = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -0{,}5 \\ 0 & 0{,}33 & 0 & 0 \\ -0{,}25 & -0{,}25 & 0{,}5 & 0 \\ 0 & -0{,}2 & -0{,}2 & 0{,}4 \end{bmatrix}$$

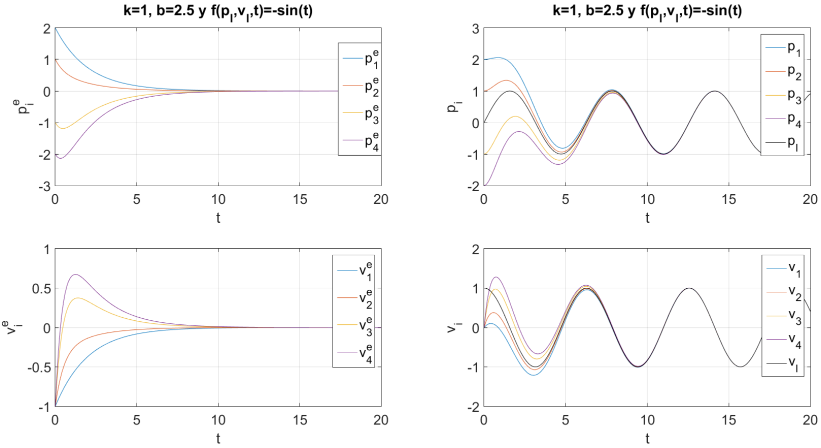
Algoritmo 1

Los valores propios de Γ son 0.2596, 0.3333 y 0.8202 ± 0.0380. Para $k = 1$, la condición (8) se cumple si $b > 0.0511$.



Algoritmo 2

Por el Teorema 2 sabemos que para cualquier $k, b > 0$ el estado de consenso es alcanzado cuando $\mathcal{G}^+$ contiene un árbol de expansión dirigido.



Contenido:

Comentarios finales

Conclusiones

- Se extienden los resultados presentados en [Yu et al., 2010], donde se estudia el problema de consenso sin líder con agentes idénticos de segundo orden.
- A diferencia del trabajo [Liu et al., 2008], se considera que solo una pequeña porción (e.g. dos agentes) tiene acceso a la información del líder.
- Se muestra que es necesario que el grafo extendido tenga al líder virtual como raíz.

Trabajo futuro

Considerar:

- Estados inaccesibles (velocidad),
- Fenómenos en los enlaces (retardos o perdidas de paquetes),
- Desempeño y robustez,
- Cambios en la conexión (conmutadas o **dependientes del estado**),
- Formaciones (fijas o **emergentes**).

[Lee and Spong, 2006] Lee, D. and Spong, M. W. (2006).
Flocking of Multiple inertial systems on Balanced Graph.

[Liu et al., 2008] Liu, Y., Jia, Y., Du, J., and Yu, F. (2008).
Consensus problem of multiple inertial agents with fixed and switching topologies.
Proc. World Congr. Intell. Control Autom., pages 1470–1475.

[Mesbahi and Egerstedt, 2010] Mesbahi, M. and Egerstedt, M. (2010).
Graph theoretic methods in multiagent networks.
Princeton University Press.

[R. Olfati-Saber and R. M. Murray, 2004] R. Olfati-Saber and R. M. Murray (2004).
Consensus Problems in Networks of Agents with Switching Topology and Time-Delays.
IEEE Trans. Automat. Contr., 49(9)(9):1520–1533.

[Ren, 2008] Ren, W. (2008).
Distributed Consensus in Multivehicle Cooperative Control: Theory and Applications.
Work. Coop. Control Mult. Auton. Veh., pages 1–60.

[Ren and Beard, 2008] Ren, W. and Beard, R. W. (2008).
Distributed Consensus in Multi-vehicle Cooperative Control: Theory and Applications.
Springer-verlag.

[Yu et al., 2010] Yu, W., Chen, G., and Cao, M. (2010).
Some necessary and sufficient conditions for second-order consensus in multi-agent dynamical systems.
Automatica, 46(6):1089–1095.

¡¡ Muchas Gracias !!

¿Preguntas?