

# Control distribuido de sistemas multiagente

## Consenso con líder virtual en agentes inerciales



M.C.S.D. Eber J. Ávila-Martínez.

Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica (IPICT),  
División de Matemáticas Aplicadas (DMAp),  
Laboratorio de Redes Complejas (LRC).



### Introducción

Los sistemas multiagente son una forma de representar y estudiar fenómenos biológicos, sociales y de ingeniería, tales como la formación y movimiento de grupos de animales o la coordinación de equipos de robots móviles [1]. Estos sistemas están formados por un grupo de subsistemas dinámicos, llamados agentes, que interactúan entre sí dentro de vecindades formadas por conexiones locales y a través de su estructura de comunicación actualizan su estado interno en base a la información recibida según el algoritmo o controlador local. Algunos de los comportamientos más estudiados en este contexto han sido, la sincronización, el movimiento en parvada (flocking) y el consenso. En particular, el problema de consenso en sistemas multiagente, se puede describir como proponer un algoritmo de interacción local de modo que todos los agentes alcancen un acuerdo en términos de una variable de interés, llamada *estado de consenso* [2].

### Planteamiento del problema

Considere el sistema multiagente compuesto por  $N$  agentes inerciales

$$\dot{p}_i = v_i, \quad m_i \dot{v}_i = u_i, \quad i = 1, \dots, N, \quad (1)$$

donde  $p_i, v_i, u_i \in \mathbb{R}^n$  y  $m_i > 0$  son la posición, velocidad, la entrada (protocolo) de control y la masa del  $i$ -ésimo agente, respectivamente. Además, considere que el grupo de agentes interactúa a través de una red de comunicación representada por un grafo dirigido  $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ . En este trabajo solo son considerados grafos fijos, es decir, la red de comunicación no cambia en ningún momento.

La dinámica del agente líder virtual esta dada por:

$$\dot{p}_l = v_l, \quad \dot{v}_l = f(p_l, v_l, t) \quad (2)$$

donde  $p_l, v_l \in \mathbb{R}^n$  son, la posición y velocidad del líder virtual, respectivamente, y  $f: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^n$  es una función no lineal, continua por pedazos y localmente Lipschitz, que describe la aceleración del líder.

**Consenso con líder virtual:** Se dice que un sistema multiagente alcanza un *estado de consenso* con un líder virtual si para cualquier condición inicial

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|p_i(t) - p_l(t)\| = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \|v_i(t) - v_l(t)\| = 0, \quad i = 1, \dots, N. \quad (3)$$

### Líder sin aceleración

Sea el protocolo de control, también llamado algoritmo de consenso, dado por:

$$u_i = -k \sum_{j=1}^N a_{ij}(p_i - p_j) - b \sum_{j=1}^N a_{ij}(v_i - v_j) - d_i [k(p_i - p_l) + b(v_i - v_l)], \quad i = 1, \dots, N, \quad (4)$$

donde  $k, b \in \mathbb{R}_{>0}$  son ganancias por diseñar,  $a_{ij}$  es el  $ij$ -ésimo elemento de la matriz de adyacencia asociada a la estructura de comunicación  $\mathcal{A}(\mathcal{G})$ . La variable  $d_i$  se utiliza para establecer cuales agentes reciben información directamente del líder de la siguiente manera;  $d_i > 0$  si el agente  $i$  recibe información del líder virtual y  $d_i = 0$  en caso contrario.

Denote los vectores de error en posición y velocidad como  $P^e = [(p_1^e)^T, \dots, (p_N^e)^T]^T$  y  $V^e = [(v_1^e)^T, \dots, (v_N^e)^T]^T$ , respectivamente, donde  $p_i^e = p_i - p_l$  y  $v_i^e = v_i - v_l$  con  $i = 1, \dots, N$ . Entonces, la dinámica del error del sistema completo se puede escribir en forma matricial como

$$\dot{P}^e = V^e, \quad (M \otimes I_n) \dot{V}^e = -k(L_D \otimes I_n)P^e - b(L_D \otimes I_n)V^e \quad (5)$$

donde  $M = \text{diag}(m_1, \dots, m_N) \in \mathbb{R}^{N \times N}$  es la matriz de inercias del grupo de agentes,  $L_D = L + D$  con  $L$  la matriz Laplaciana asociada a  $\mathcal{G}$  y  $D = \text{diag}(d_1, \dots, d_N) \in \mathbb{R}^{N \times N}$ , siendo  $\otimes$  el producto de Kronecker.

**Grafo extendido:** Llame grafo extendido  $\mathcal{G}^+$ , al grafo que representa la estructura de comunicación que considera al agente líder como el elemento  $N+1$  dentro de la red de agentes.

En relación con la anterior definición, se tiene el siguiente resultado

**Lemma 1** ([3]). *La matriz  $L_D$  es invertible si y solo si  $\mathcal{G}^+$  contiene un árbol de expansión dirigido con el líder virtual como raíz. Más aún, todos los valores propios de  $L_D$  tienen parte real positiva.*

Sea  $X^e = [(P^e)^T, (V^e)^T]^T \in \mathbb{R}^{2N}$ , y  $\Gamma = M^{-1}L_D$ , es posible escribir (5) como

$$\dot{X}^e = (\Xi \otimes I_n)X^e, \quad \text{donde } \Xi = \begin{bmatrix} 0_N & I_N \\ -k\Gamma & -b\Gamma \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2N \times 2N} \quad (6)$$

El siguiente teorema muestra condiciones necesarias y suficientes para el problema de consenso con líder virtual bajo el algoritmo (4).

**Teorema 1** ([3]). *El estado de consenso (3) es alcanzado en un grupo de múltiples agentes inerciales (1) con protocolo (4) si, y solo si, la estructura de comunicación  $\mathcal{G}^+$  contiene un árbol de expansión dirigido y*

$$\frac{b^2}{k} > \max_{1 \leq i \leq N} \frac{\text{Im}(\lambda_i)^2}{\text{Re}(\lambda_i)(\text{Re}(\lambda_i)^2 + \text{Im}(\lambda_i)^2)} \quad (7)$$

donde  $\lambda_i$  son los valores propios de  $\Gamma$ .

### Líder con aceleración

Ahora, considere el siguiente protocolo de consenso:

$$u_i = -\frac{k}{\eta_i} \sum_{j=1}^N a_{ij}(p_i - p_j) - \frac{b}{\eta_i} \sum_{j=1}^N a_{ij}(v_i - v_j) + \frac{1}{\eta_i} \sum_{j=1}^N a_{ij} \dot{p}_j - \frac{d_i}{\eta_i} [k(p_i - p_l) + b(v_i - v_l) - \dot{v}_l], \quad i = 1, \dots, N \quad (8)$$

donde  $\eta_i = \frac{1}{m_i}(d_i + \sum_{j=1}^N a_{ij})$ . Note que este algoritmo considera que la aceleración de los agentes y del líder virtual es información disponible y que es transmitida a través de los enlaces de comunicación.

Definiendo de la misma manera los errores en posición y velocidad del agente  $i$ , es decir  $p_i^e = p_i - p_l$  y  $v_i^e = v_i - v_l$ , respectivamente. Entonces, de (1) y (8), la dinámica del error puede escribirse en forma matricial como

$$\dot{P}^e = V^e, \quad (L_D \otimes I_n) \dot{V}^e = -k(L_D \otimes I_n)P^e - b(L_D \otimes I_n)V^e, \quad (9)$$

donde  $P^e = [(p_1^e)^T, \dots, (p_N^e)^T]^T$  es el vector de error en posición, y  $V^e = [(v_1^e)^T, \dots, (v_N^e)^T]^T$  el de velocidad.

El siguiente resultado muestra condiciones necesarias y suficientes bajo las cuales el estado de consenso con un líder virtual es alcanzado

**Teorema 2** ([3]). *Sea un sistema de múltiples agentes inerciales con dinámica (1), un líder virtual con dinámica (2), y algoritmo de consenso (8). El estado de consenso (3) es alcanzado si y solo si el grafo  $\mathcal{G}^+$  contiene un árbol de expansión dirigido con el agente líder como raíz. Más aún, si  $b \geq 2\sqrt{k}$  para cualquier  $k \in \mathbb{R}^+$ , la convergencia es exponencial.*

### Ejemplos numéricos

Suponga un grupo de  $N = 4$  agentes inerciales de dimensión  $n = 1$  con masas  $m_i = i + 1$  donde  $i = 1, \dots, 4$  y estructuras de comunicación mostradas en la figura 1. Observe que el grafo  $\mathcal{G}^+$  de la figura 1b contiene un árbol de expansión dirigido, mientras que para la figura 1a no lo contiene.

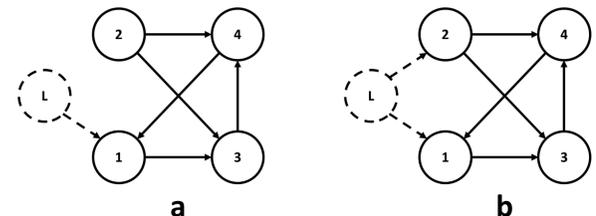


Figura 1: Red de agentes inerciales con un líder virtual.

Los siguientes ejemplos numéricos ilustran la efectividad de los algoritmos aplicados a la red de agentes mostrada en la figura 1b. Las matrices asociadas a dicha estructura son:

$$M = \text{diag}(2, 3, 4, 5), \quad D = \text{diag}(1, 1, 0, 0), \quad L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \Gamma = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -0,5 \\ 0 & 0,33 & 0 & 0 \\ -0,25 & -0,25 & 0,5 & 0 \\ 0 & -0,2 & -0,2 & 0,4 \end{bmatrix}$$

donde los valores propios de  $\Gamma$  son: 0.3333, 0.2596 y  $0.8202 \pm 0.0380i$ .

### Ejemplo: Líder sin aceleración

Suponga que la ganancia  $k = 1$ , entonces la condición (7) del Teorema 1 se cumple si  $b > 0.0511$ .

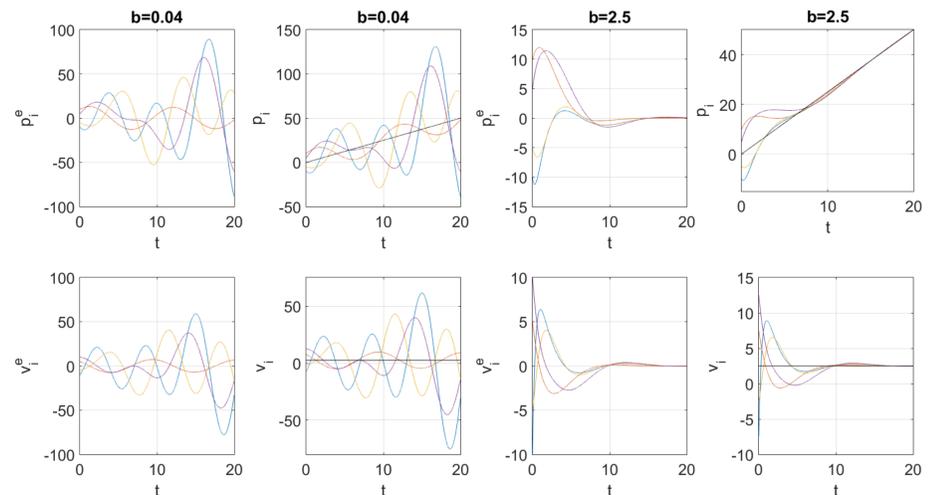


Figura 2: Red de agentes aplicando algoritmo (4).

### Ejemplo: Líder con aceleración

Suponga que  $f(p_l, v_l, t) = -\sin(t)$  y las ganancias  $k, b > 0$ . Note que las condiciones del Teorema 2 se cumplen solo para la red de agentes de la figura 1b.

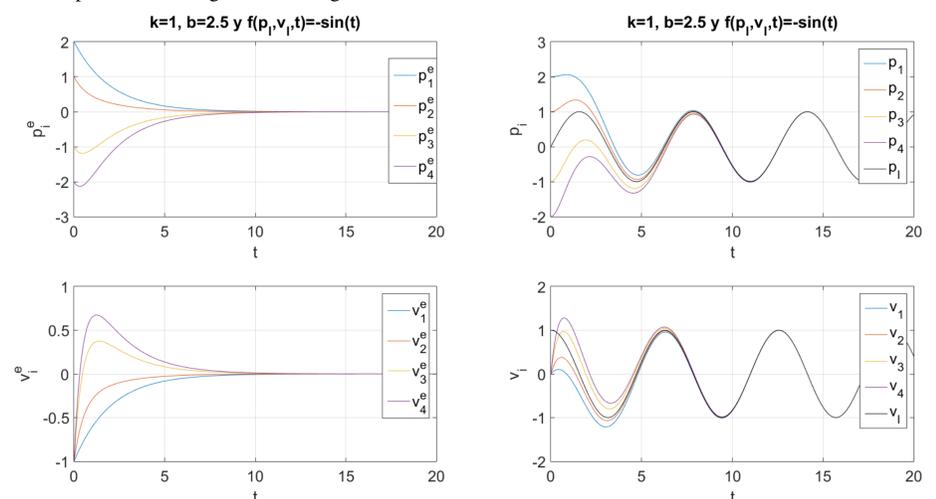


Figura 3: Red de agentes aplicando algoritmo (8).

### Referencias

- [1] Z. Qu. *Cooperative Control of Dynamical Systems: Applications to Autonomous Vehicles*.
- [2] Wei Ren and Randal W. Beard. *Distributed Consensus in Multi-vehicle Cooperative Control: Theory and Applications*.
- [3] Eber J. Ávila-Martínez y Juan G. Barajas-Ramírez. Consenso con líder virtual en sistemas de múltiples agentes inerciales. Congreso nacional de control automático AMCA, 2017.